**הרצאה 2**

**1 אי-שוויונות ריכוז ומשפטי גבול**

**משפט 1.1:** אי שוויונות צ'רנוף-הופדינג:

*יהיו מ"מ בת"ל כך ש: לכל . ויהי . אזי, לכל מתקיים:*

*(התוחלת היא 0).*

*החסם פחות טוב מאשר אי"ש צ'רנוף א, (פי 4 במעריך) אבל ההוכחה הרבה יותר פשוטה.*

הרעיון המרכזי של ההוכחה: אנחנו רוצים לחסום את ההסתברות של המאורע ע"י אי"ש מרקוב. אבל X הוא לא אי"ש. אז עוברים למשתנה מקרי אחר, שהוא תמיד חיובי. אז נבצע: וזה יאפשר לנו להשתמש במרקוב ולחסום את ההסתברות עם התוחלת (של המ"מ החדש) ולחסום עם חסם עליון על התוחלת: , ומשם יהיה נוח להגיע לחסם של המשפט.

ההוכחה משתמשת בטענה הבאה:

**למה 1.2:** לכל מספר ממשי מתקיים:

*ההוכחה בעזרת טורי טיילור של שלושת הפונקציות:*

*א – כי מתקיים לכל n שלם טבעי[[1]](#footnote-1).  
ב – כל האיברים עם n אי זוגי מצטמצמים (חיובי בראשון, שלילי בשני). אז זה בעצם כל ה-n הזוגיים, פעמיים.  
ג – הביטוי השמאלי זה פשוט טור טיילור של הפונקציה השלישית.*

*הוכחת משפט 1.1: נוכיח ש: . לכל שלם ממשי , מתקיים:*

*ע"פ הגדרת התוחלת, וע"פ טענת העזר. מכיוון שכל ה- בת"ל ע"פ ההנחה, גם המ"מ הם בת"ל. אז:*

*א – כי .  
ב – כי כל ה- בת"ל.  
ג – ע"פ טענת העזר.*

*ולכן: (1)*

*א – כי היא פונקציה מונוטונית עולה. אז אם , גם .  
ב – אי"ש מרקוב, מכיוון שהמ"מ החדש הוא אי-שלילי.*

*אנחנו רוצים למצוא את החסם הטוב ביותר. מכיוון שאי השוויון מתקיים לכל למדא חיובי, אנחנו רוצים להקטין את:*

*נגזור לפי למדא ונקבל:*

*מכיוון שהחלק של e תמיד חיובי, 0 מתקבל רק כאשר . וניתן לראות שזו נקודת מינימום כי לכל מתקיים: , . כלומר הפונקציה יורדת לפני ועולה אחרי. נציב ב-(1):*

*כנדרש.*

***1.1 משפטי גבולות:***

***משפט 1.3:*** *החוק החלש של המספרים הגדולים.*

*יהי סדרה של מ"מ בת"ל, לכולם אותה התפלגות ותוחלת סופית . אזי, לכל מתקיים:*

*באופן אינטואיטיבי, ה"ממוצע" של המ"מ שואף לתוחלת. יותר פורמלית: ככל שסכום יותר מ"מ, ההסתברות שההפרש בין הממוצע שלהם לתוחלת גדול מאפסילון, שואפת לאפס.*

*ההבדל בין זה לצ'בישב: צ'בישב הוא תוצאה כמותית - חוסם במספר קבוע עבור מספר מסוים של מ"מ. החוק הזה הוא תוצאה איכותית – ככל שיהיו יותר מ"מ, נתכנס למשהו מסוים.*

*נוכיח מקרה פרטי של המשפט, שבו יש לכל המ"מ שונות סופית :*

*לפי לינאריות התוחלת, מתקיים לכל n טבעי: (2)*

*ומכיוון שכולם בת"ל, מתקיים: (3)*

*ולכן, לכל מתקיים ע"פ אי"ש צ'בישב:*

*א – אי"ש צ'בישב.*

*ובסה"כ:*

*א – כי סופי. (דרשנו שונות סופית).*

*ולכן:*

*לסיכום, המשפט חלש יותר מצ'בישב במובן מסוים, כי הוא לא נותן חסם ספציפי. הוא רק אומר שאם נלך מספיק רחוק אז זה יסתדר.*

***משפט 1.4:*** *החוק החזק של המספרים הגדולים.*

*יהי סדרה של מ"מ בת"ל, לכולם אותה התפלגות, תוחלת סופית , ושונות סופית. אזי, לכל מתקיים:*

*כלומר, ההסתברות שהממוצע שואף לתוחלת כאשר n שואף לאינסוף, היא 1. לכאורה כל מה שעשינו זה להחליף בין ההסתברות לגבול, אבל זאת החלפה לא טריוויאלית והיא משנה את המשמעות. בשני החוקים נטען שהסדרה של המ"מ מתכנסת ל-. ההבדל הוא בצורת ההתכנסות. כדי להסביר את זה, נגדיר שתי צורות התכנסות:*

***הגדרה 1.5:*** *נאמר שסדרה של מ"מ* ***מתכנסת בהסתברות*** *למ"מ X כאשר n שואף לאינסוף, אם לכל מתקיים:*

*את החלק השמאלי נכתוב בדרך כלל ככה:*

*כלומר, ההסתברות שההפרש בין ל- גדול מאפסילון, שואפת לאפס כאשר n שואף לאינסוף. נסמן:*

***הגדרה 1.6:*** *נאמר שסדרה של מ"מ* ***מתכנסת כמעט בוודאות*** *למ"מ X כאשר n שואף לאינסוף, אם מתקיים:*

*אם מרחב המדגם סופי, זה אומר שלכל מאורע, כאשר n שואף לאינסוף, . אם מרחב המדגם אינסופי אז זה קורה ב"כמעט כולם".*

*כלומר, ההסתברות שנקבל מאורע שעבורו הסדרה שואפת לX, היא 1. נסמן:*

*באופן כללי, התכנסות "כמעט בוודאות" גוררת התכנסות בהסתברות. בכיוון ההפוך זה לא תמיד נכון, לדוגמה:*

*יהי מ"מ ותהי סדרה בת"ל של מ"מ כך ש , לכל n טבעי. יהי כלשהו, אז מתקיים:*

*כלומר, .*

*מצד שני, נב"ש ש . ע"פ הגדרה 1.6 זה אומר שבהסתברות 1, לכל אפסילון חיובי מתקיים לכל n החל ממקום מסוים. כלומר לפי ההתפלגות של ה-, בהסתברות 1 מתקיים לכל n החל ממקום מסוים. אבל, לכל m טבעי מתקיים שההסתברות ש לכל היא:*

*א - מכיוון שהמ"מ כולם בת"ל.  
ב – כי .*

*בסתירה לכך שזה קורה בהסתברות 1.*

***דוגמה 1:*** *נטיל מטבע n פעמים באופן בת"ל. בהרצאה הקודמת ראינו כלים למציאת על ההסתברות שנקבל עץ הרבה יותר או פחות מחצי מהפעמים. הכלים האלה נתנו תוצאה כמותית – לכל n מסוים, נתנו חסם מסוים. משפטים 1.3, 1.4 נותנים תוצאה איכותית – כלומר, לא נותנים חסם מסוים עבור אף n אלא מבטיחים תוצאה מסוימת עבור n מספיק גדול.   
החוק החלש אומר שעבור כל אפסילון ודלתא חיוביים, אם נטיל את המטבע מספיק פעמים אז בהסתברות לפחות נקבל עץ לפחות ולכל היותר פעמים.*

*יש עוד דוגמאות בקובץ המקורי.*

1. אפשר להוכיח אלגברית, אבל גם: זה מספר הדרכים לחלק 2n אנשים ל-n זוגות. אז זה מספר שלם חיובי. [↑](#footnote-ref-1)